О СТАЦИОНАРНОСТИ ПРОЦЕССА APGARCH(*p*,*q*)

В. С. Терех

Белорусский государственный университет
Минск, Беларусь
E-mail: vladimir.terekh@gmail.com

Рассматривается необходимое и достаточное условие для существования единственного стационарного в узком смысле решения модели APGARCH(p,q). В качестве примера приводится модель APGARCH(1,1).

Ключевые слова: процесс APGARCH, стационарность в узком смысле.

Рассмотрим асимметричную степенную обобщенную модель авторегрессионной условной гетероскедастичности (Asymmetric Power Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity) APGARCH(p,q), p, q = 1, 2, …, для процесса X_t, $t \in Z$:

$$X_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad \sigma_t^\gamma = c + \sum_{i=1}^{p} b_i \left| X_{t-1} \right|^\gamma \left\{ 1 - d_i \operatorname{sgn}(\varepsilon_{t-i}) \right\}^\gamma + \sum_{j=1}^{q} a_j \sigma_{t-j}^\gamma, \tag{1}$$

где $\{\varepsilon_t,\ t \in Z\}$ – независимые, одинаково распределенные случайные величины с математическим ожиданием равным 0 и $0 < E|\varepsilon_t|^\gamma < \infty$, $\gamma \in (0,2]$, $c > 0$, $a_j \geq 0$, $b_i \geq 0$, $d_i \in (-1,1)$, – параметры, $1 \leq j \leq q$, $1 \leq i \leq p$.

Также рассмотрим общий вид модели волатильности (см. [1]):

$$Y_t = \rho_t \psi(\varepsilon_t), \quad \rho_t = \varphi_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(\varepsilon_{t-i}) \rho_{t-i}, \tag{2}$$

где $\{\varepsilon_t,\ t \in Z\}$ – независимые, одинаково распределенные случайные величины, $\varphi_0 > 0$ – константа, $\psi(\cdot) \geq 0$, $\varphi_i(\cdot) \geq 0$, i = 1, 2, …, и $E\{\psi(\varepsilon_t)\} < \infty$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Уравнение (2) имеет единственное стационарное в узком смысле решение

$$Y_t \equiv \varphi_0 \psi(\varepsilon_t) \left\{ 1 + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_l < \infty} \varphi_{i_1}(\varepsilon_{t-i_1}) \cdots \varphi_{i_l}(\varepsilon_{t-i_1-\ldots-i_l}) \right\}, \quad t \in Z, \tag{3}$$

с $|EY_t| < \infty$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i=1}^{\infty} E\{\varphi_i(\varepsilon_t)\} < 1, \quad t \in Z .$$

Доказательство. Докажем достаточность. Из соотношения (2) следует, что для любого целого $k \geq 1$ справедливо:

$$Y_t = \left(\varphi_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(\varepsilon_{t-i}) \rho_{t-i} \right) \psi(\varepsilon_t) = \varphi_0 \psi(\varepsilon_t) + \psi(\varepsilon_t) \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(\varepsilon_{t-i}) \rho_{t-i} =$$

$$= \varphi_0 \psi(\varepsilon_t) \left\{ 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(\varepsilon_{t-i}) \right\} + \psi(\varepsilon_t) \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_i(\varepsilon_{t-i}) \varphi_j(\varepsilon_{t-i-j}) \rho_{t-i-j}.$$

Выполняя рекурсивную подстановку еще k – 2 раза, получим:

$$Y_t = \varphi_0 \psi(\varepsilon_t)\left\{1 + \sum_{l=1}^{k} \sum_{1\le i_1,\ldots,i_l<\infty} \varphi_{i_1}\left(\varepsilon_{t-i_1}\right)\cdots\varphi_{i_l}\left(\varepsilon_{t-i_1-\ldots-i_l}\right)\right\} +$$

$$+\psi(\varepsilon_t) \sum_{1\le i_1,\ldots,i_{k+1}<\infty} \varphi_{i_1}\left(\varepsilon_{t-i_1}\right)\cdots\varphi_{i_{k+1}}\left(\varepsilon_{t-i_1-\ldots-i_{k+1}}\right)\rho_{t-i_1-\ldots-i_{k+1}}. \qquad (4)$$

Обозначим

$$Y_t' = \varphi_0 \psi(\varepsilon_t)\left\{1 + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{1\le i_1,\ldots,i_l<\infty} \varphi_{i_1}\left(\varepsilon_{t-i_1}\right)\cdots\varphi_{i_l}\left(\varepsilon_{t-i_1-\ldots-i_l}\right)\right\}.$$

Так как все множители произведения $\varphi_{i_1}\left(\varepsilon_{t-i_1}\right)\cdots\varphi_{i_l}\left(\varepsilon_{t-i_1-\ldots-i_l}\right)$ в (3) независимы, и $\{\varepsilon_t, t \in Z\}$ – независимые, одинаково распределенные случайные величины, то для любого $l \ge 1$

$$E\left\{\sum_{1\le i_1,\ldots,i_l<\infty} \varphi_{i_1}\left(\varepsilon_{t-i_1}\right)\cdots\varphi_{i_l}\left(\varepsilon_{t-i_1-\ldots-i_l}\right)\right\} = \sum_{1\le i_1,\ldots,i_l<\infty} \prod_{j=1}^{l} E\left\{\varphi_{i_j}(\varepsilon_1)\right\} =$$

$$= \sum_{i_1=1}^{\infty}\sum_{i_2=1}^{\infty}\ldots\sum_{i_l=1}^{\infty} E\left\{\varphi_{i_1}(\varepsilon_1)\right\}E\left\{\varphi_{i_2}(\varepsilon_1)\right\}\ldots E\left\{\varphi_{i_l}(\varepsilon_1)\right\} =$$

$$= \sum_{i_1=1}^{\infty} E\left\{\varphi_{i_1}(\varepsilon_1)\right\}\sum_{i_2=1}^{\infty} E\left\{\varphi_{i_2}(\varepsilon_1)\right\}\ldots\sum_{i_l=1}^{\infty} E\left\{\varphi_{i_l}(\varepsilon_1)\right\} = \left\{\sum_{i=1}^{\infty} E\varphi_i(\varepsilon_1)\right\}^l. \qquad (5)$$

Тогда

$$E\{Y_t'\} = \varphi_0 E\{\psi(\varepsilon_1)\}\left\{1 + \sum_{l=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} E\varphi_i(\varepsilon_1)\right)^l\right\}.$$

А так как $\sum_{i=1}^{\infty} E\{\varphi_i(\varepsilon_t)\} < 1$, то, используя формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, получим:

$$E\{Y_t'\} = \frac{\varphi_0 E\{\psi(\varepsilon_1)\}}{1 - \sum_{i=1}^{\infty} E\varphi_i(\varepsilon_1)}.$$

Таким образом, $0 \le Y_t' < \infty$ п.н., $E\{Y_t'\} \le \infty$, и, следовательно, последовательность $\{Y_t'\}$ стационарная в узком смысле (см. теорему А1 в [2]). Легко показать, что Y_t' удовлетворяет (2).

Покажем единственность. Пусть $\{Y_t\}$ – строго стационарное решение (2) и $|EY_t| < \infty$. Теперь покажем, что $Y_t = Y_t'$ для любого фиксированного t. Согласно (4) для любого $k \ge 1$

$$\left|Y_t - Y_t'\right| \le \psi(\varepsilon_t) \sum_{1\le i_1,\ldots,i_{k+1}<\infty} \varphi_{i_1}\left(\varepsilon_{t-i_1}\right)\cdots\varphi_{i_{k+1}}\left(\varepsilon_{t-i_1-\ldots-i_{k+1}}\right)\left|\rho_{t-i_1-\ldots-i_{k+1}}\right| +$$

$$+\varphi_0\psi(\varepsilon_t)\sum_{l=1}^{k} \sum_{1\le i_1,\ldots,i_l<\infty} \varphi_{i_1}\left(\varepsilon_{t-i_1}\right)\cdots\varphi_{i_l}\left(\varepsilon_{t-i_1-\ldots-i_l}\right).$$

Отсюда

$$E\left|Y_t - Y_t'\right| \le \left[E|Y_1| + \frac{\varphi_0 E\{\psi(\varepsilon_1)\}}{1 - \sum_{i=1}^{\infty} E\varphi_i(\varepsilon_1)}\right]\left\{\sum_{i=1}^{\infty} E\varphi_i(\varepsilon_1)\right\}^{k+1}.$$

Пусть $A_k = \{|Y_t - Y_t'| > 1/k\}$. Тогда, используя неравенство Маркова, получим

$$P(A_k) \le kE|Y_t - Y_t'| \le k\left[E|Y_1| + \frac{\varphi_0 E\{\psi(\varepsilon_1)\}}{1-\sum_{i=1}^{\infty} E\varphi_i(\varepsilon_1)}\right]\left\{\sum_{i=1}^{\infty} E\varphi_i(\varepsilon_1)\right\}^{k+1}.$$

Обозначим

$$A = \lim_{k\to\infty}\sup A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=k}^{\infty} A_m .$$

Так как $\sum_{k\ge 1} P(A_k) < \infty$, то из леммы Бореля – Кантелли следует, что $P(A) = 0$. Заметим, что из того, что $P(A_{k+1}) = 0$, следует, что $P(A_k) = 0$. Тогда $P(A_k) = 0$ для любого $k \ge 1$. Следовательно, $Y_t = Y_t'$ п.н.

Необходимость. Согласно соотношению (5), математическое ожидание для Y_t, определенного как правая часть уравнения (3), можно записать в виде

$$E\{Y_t\} = \varphi_0 E\{\psi(\varepsilon_t)\}\left\{1 + \sum_{l=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} E\varphi_i(\varepsilon_t)\right)^l\right\}.$$

По условию $|EY_t| < \infty$, а это выполняется только при $\sum_{i=1}^{\infty} E\{\varphi_i(\varepsilon_t)\} < 1$.

Теорема доказана.

Нетрудно видеть, что (1) является частным случаем (2) при $Y_t = |X_t|^\gamma$, $\rho_t = \sigma_t^\gamma$, $\psi(x) = |x|^\gamma$, $\varphi_i(x) = b_i(|x| - d_i x)^\gamma + a_i$ в предположении, что $b_{p+j} = a_{q+j} = 0$ для любого $j \ge 1$.

Тогда для (1) справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Для того, чтобы (1) задавала единственный стационарный в узком смысле процесс $\{X_t, t \in Z\}$ с $E|X_t|^\gamma < \infty$, необходимо и достаточно выполнение следующего условия

$$\sum_{i=1}^{p} b_i E\left\{(|\varepsilon_t| - d_i\varepsilon_t)^\gamma\right\} + \sum_{j=1}^{q} a_j < 1, \quad t \in Z .$$

Пример. Рассмотрим модель APGARCH(1,1) для процесса X_t, $t \in Z$:

$$X_t = \sigma_t\varepsilon_t, \quad \sigma_t^\gamma = c + b|X_{t-1}|^\gamma\{1 - d\,\mathrm{sgn}(\varepsilon_{t-i})\}^\gamma + a\sigma_{t-j}^\gamma ,$$

где $\{\varepsilon_t, t \in Z\}$ – независимые, одинаково распределенные случайные величины с математическим ожиданием равным 0 и $0 < E|\varepsilon_t|^\gamma < \infty$, $\gamma \in (0,2]$, $c > 0$, $a \ge 0$, $b \ge 0$, $d \in (-1,1)$ – параметры.

Для описанной выше модели необходимым и достаточным условием для существования единственного стационарного в узком смысле решения с $E|X_t|^\gamma < \infty$ будет

$$bE\left\{(|\varepsilon_t| - d\varepsilon_t)^\gamma\right\} + a < 1 .$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Penzer, J.* Approximating Volatilities by Asymmetric Power GARCH Functions / J. Penzer, M. Wang, Q. Yao // Australian & New Zealand Journal of Statistics. 2009. V. 51. № 2. P. 201–225.

2. *Francq, C.* GARCH Models: Structure, Statistical Inference and Financial Applications / C. Francq, J. Zakoian. Chichester, UK 0: John Wiley, 2010. 504 p.